

УДК 517.9

# АСИМПТОТИЧНІ РОЗВ'ЯЗКИ СИСТЕМИ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ З ТОЧКОЮ ЗВОРОТУ

*І. Г. КЛЮЧНИК, Д. Г. ЗАВІЗІОН*

Получено асимптотический метод интегрирования линейной системы дифференциальных уравнений с малым параметром при части производных.

The obtained asymptotic method of integration linear system of differential equations with small parameter with a turning point.

В даній статті одержано асимптотичний метод інтегрування лінійної системи диференціальних рівнянь з малим параметром при частині похідних.

В [1-8] приводиться огляд літератури і пропонуються методи формального спрощення для сингулярно збуреної лінійної системи диференціальних рівнянь з точкою звороту.

Розглянемо систему вигляду

$$\begin{aligned} y' &= A(x)y + A_1(x)y_1 \\ \varepsilon y'_1 &= (B(x) + \varepsilon B_1(x))y_1 + \varepsilon B_2(x)y, \end{aligned} \quad (1)$$

де  $y \in R^p, y_1 \in R^m, A(x), A_1(x), B_1(x), B_2(x)$  – голоморфні при

$$|x| \leq x_0 \quad (2)$$

матриці, а  $B(x)$  –  $m \times m$  – вимірна матриця вигляду

$$B(x) = xI_2 + N, \quad (3)$$

де  $N$  – нільпотентна матриця, а ненульові елементи матриці  $I_2$

визначаються з рівності

$$\{I_2\}_{m1} = 1, \{I_2\}_{m, m-i} = a_{i+1}(x), \{I_2\}_{mm} = 0, i = \overline{1, m-2}.$$

Будемо вважати, що

$$\text{tr} B_1(x) = \text{tr} A(x) \equiv 0. \quad (4)$$

За допомогою перетворення  $\begin{pmatrix} y \\ y_1 \end{pmatrix} = \Phi(x, \varepsilon) \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$  систему (1) приведемо до

вигляду

$$u' = C(\varepsilon)v, \quad (5)$$

$$\varepsilon v' = B(x)v + \varepsilon D(\varepsilon)u, \quad (6)$$

де

$$\Phi(x, \varepsilon) = \begin{pmatrix} U(x) + \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon^n U_n(x) & \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon^n V_{n1}(x) \\ \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon^n U_{n1}(x) & V(x) + \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon^n V_n(x) \end{pmatrix}, \quad (7)$$

$$C(\varepsilon) = \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^n C_n, \quad D(\varepsilon) = \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^n D_n, \quad (8)$$

$C_n, D_n$  – сталі матриці відповідно розмірностей  $p \times m, m \times p$  елементи яких є нулі, крім  $\{C_n\}_{in} = c_{in}, \{D_n\}_{ni} = d_{ni}, i = \overline{1, p}$ , а матриці  $U(x), U_n(x) - p \times p$  вимірні,  $V(x), V_n(x) - m \times m$  вимірні,  $V_{n1}(x), U_{n1}(x) - p \times m, m \times p$  відповідно.

Згідно вигляду рівнянь (1), (5), (6)  $\Phi(x, \varepsilon)$  формально задовольняє матричне диференціальне рівняння

$$\varepsilon \Phi' + \Phi \begin{pmatrix} 0 & \varepsilon C(\varepsilon) \\ \varepsilon D(\varepsilon) & B(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varepsilon A(x) & \varepsilon A_1(x) \\ \varepsilon B_2(x) & B(x) + \varepsilon B_1(x) \end{pmatrix} \Phi. \quad (9)$$

Підставляючи (7) в (9) і зрівнюючи коефіцієнти при  $\varepsilon$  в нульовому степені, одержимо

$$U'(x) = A(x)U(x), \quad (10)$$

$$U(x)C_0 + V_{11}(x)B(x) = A_1(x)V(x), \quad (11)$$

$$V(x)D_0 = B_2(x)U(x) + B(x)U_{11}(x), \quad (12)$$

$$V(x)B(x) = B(x)V(x). \quad (13)$$

З (11) і (14) одержимо

$$U(x) = \Omega_0^x(A(x)),$$

$$V(x) = q_{0m}(x)I + \sum_{r=1}^{m-1} q_{0r}(x)B^{m-r}(x), \quad (14)$$

де  $\Omega_0^x(A(x))$  – матрицант рівняння (10),  $q_{0i}(x), i = \overline{1, m}$  – довільні голоморфні функції в області (2),  $I$  – одинична матриця.

Для визначення  $q_{0i}(x), i = \overline{1, m}$  використаємо систему рівнянь, яка одержуються з (7), (9) і зрівнюючи коефіцієнти при першому степені параметра  $\varepsilon$ :

$$U'_1(x) + V_{11}(x)D_0 = A(x)U_1(x) + A_1(x)U_{11}(x), \quad (15)$$

$$\begin{aligned} V'_{11}(x) + U(x)C_1 + U_1(x)C_0 + V_{21}(x)B(x) = \\ = A(x)V_{11}(x) + A_1(x)V_1(x), \end{aligned} \quad (16)$$

$$\begin{aligned} U'_{11}(x) + V(x)D_1 + V_1(x)D_0 = \\ = B_2(x)U_1(x) + B_1(x)U_{11}(x) + B(x)U_{21}(x), \end{aligned} \quad (17)$$

$$V'(x) + V_1(x)B(x) = B(x)V_1(x) + B_1(x)V(x). \quad (18)$$

Згідно лем із [2] для існування розв'язку рівняння (18) необхідно і достатньо виконання наступних умов:

$$\text{tr}((V'(x) - B_1(x)V(x))B^k(x)) = 0, k = \overline{0, m-1}, \quad (19)$$

де  $B^0(x) = I$ .

Підставивши в (19) вигляд  $V(x), V'(x)$  з (15) і скориставшись згідно [2], співвідношеннями

$$\text{tr}((B^{n-r}(x))'B^k(x)) = (n-r)\text{tr}(B^{n-r-1+k}(x)B'(x)),$$

одержимо

$$S(x)q'_0(x) = T(x)q_0(x), \quad (20)$$

де  $q_0(x)$  –  $m$  – вимірний вектор з елементами  $q_{0i}(x), i = \overline{1, m}$ ,

$$T(x) = T_1(x) + T_2(x),$$

елементи матриць  $T_1(x), T_2(x), S(x)$  визначаються за формулами

$$\begin{aligned} \{T_1(x)\}_{kr} &= -(m-r)\text{tr}(B^{m-r-2+k}(x)B'(x)), \\ \{T_2(x)\}_{kr} &= \text{tr}(B_1(x)B^{m-1-r+k}(x)), \\ \{S(x)\}_{kr} &= \text{tr}(B^{m-r+k-1}(x)), \quad k = \overline{1, m}, \quad r = \overline{1, m}. \end{aligned} \quad (21)$$

Помноживши рівняння (20) зліва на матрицю  $D_1(x)$

$$D_1(x) = xI_1 + N, \quad (22)$$

одержимо систему

$$D_1(x)S(x)q'_0(x) = D_1(x)T(x)q_0(x), \quad (23)$$

в якій матриці  $D_1(x)S(x)$  і  $D_1(x)T(x)$  при  $x \rightarrow 0$  мають поведінку

$$D_1(x)S(x) = xK(I + O(x)), \quad (24)$$

$$D_1(x)T(x) = D_1(0)T(0) + O(x),$$

де  $K, D_1(0)T(0) - (m \times m)$  – верхньотрикутні матриці, елементи яких визначаються за формулами

$$\{K\}_{1m} = 0, \{K\}_{jj} = m, \{K\}_{i, m-k+i} = ka_k(0),$$

$$\{D_1(0)T(0)\}_{i, m-k+i} = (k-i)a_k(0) + tr(B_1(0)B^k(0)),$$

$$\{D_1(0)T(0)\}_{jj} = m-j, j = \overline{1, m}, i = \overline{1, m-1}, k = \overline{1, m-1}.$$

Враховуючи (24), систему (23) перепишемо у вигляді

$$xq'_0(x) = H(x)q_0, \quad (25)$$

де

$$H(x) = K^{-1}D_1(0)T(0) + O(x). \quad (26)$$

З (26) і явного вигляду  $K^{-1}D_1(0)T(0)$  випливає, що матриця  $H(0)$  має власні значення  $\lambda_i = -\frac{m-i}{m}, i = \overline{1, m}$ . Тоді з [1] випливає, що система (25) має ненульовий голоморфний в області (2) розв'язок  $q_0(x)$  такий, що  $q_{0m}(0) = 1$ . Підставивши знайдені функції  $U(x)$  і  $V(x)$  в (11), (12) одержимо рівняння для визначення  $C_0, D_0, U_{11}(x), V_{11}(x)$ . Помноживши (11) справа на матрицю  $B^{m-1}(x)$ , а (12) зліва на  $B^{m-1}(x)$  одержимо рівняння

$$U(x)C_0B^{m-1}(x) + V_{11}(x)B^m(x) = A_1(x)V(x)B^{m-1}(x), \quad (27)$$

$$B^{m-1}(x)V(x)D_0 = B^{m-1}(x)B_2(x)U(x) + B^m(x)U_{11}(x). \quad (28)$$

При  $x = 0$  із (27), (28) одержимо рівняння для визначення матриць  $C_0, D_0$ :

$$U(0)C_0B^{m-1}(0) = A_1(0)V(0)B^{m-1}(0), \quad (29)$$

$$B^{m-1}(0)V(0)D_0 = B^{m-1}(0)B_2(0)U(0). \quad (30)$$

З рівнянь (29), (30) знайдемо:

$$\{C_0\}_{i1} = \{A_1(0)V(0)\}_{i1}, \{C_0\}_{ij} = 0, \{D_0\}_{mi} = \{B_2(0)U(0)\}_{mi},$$

$$\{D_0\}_{si} = 0, i = \overline{1, p}, j = \overline{2, m}, s = \overline{1, m-1}.$$

Враховуючи (29), (30) для визначення матриць  $V_{11}(x), U_{11}(x)$  з (27), (28) отримаємо рівняння вигляду

$$xV_{11}(x) = F(x), \quad xU_{11}(x) = G(x), \quad (31)$$

де  $F(x), G(x)$  – відомі матриці.

В силу вибору  $C_0, D_0$  маємо  $F(0) = 0, G(0) = 0$ , тоді

$$F(x) = x \int_0^1 F'_x(tx) dt, \quad G(x) = x \int_0^1 G'_x(tx) dt. \quad (32)$$

З врахуванням (31), (32) для  $V_{11}(x), U_{11}(x)$  знайдемо значення

$$V_{11}(x) = \int_0^1 F'_x(tx) dt, \quad U_{11}(x) = \int_0^1 G'_x(tx) dt, \quad (33)$$

які визначають голоморфні в області (2) розв'язки рівнянь (31). Отже знайдені коефіцієнти розвинень (7), (8) при  $\varepsilon$  в нульовому степені маємо систему рівнянь (15) - (18). Поклавши  $U_{11}(0) = 0$  з рівняння (15) однозначно знаходимо  $U_1(x)$  а загальний розв'язок рівняння (18) визначається за формулою

$$V_1(x) = q_{1m}(x)I + \sum_{r=1}^{m-1} q_{1r}(x)B^{m-r}(x) + W_1(x), \quad (34)$$

$W_1(x)$  – частинний розв'язок рівняння (19). Згідно [2] умови існування розв'язку рівняння, що одержується при прирівнюванні коефіцієнтів при  $\varepsilon$  у другому степені при підстановці (7) в (9) має вигляд

$$\text{tr}((B_1(x)V_1(x) - V'_1(x) + F_1(x))B^k(x)) \equiv 0, k = \overline{0, m-1}, \quad (35)$$

де  $F_1(x) = B_2(x)V_{11}(x) - U_{11}(x)C_0$ .

Підставивши (34) в (35) одержимо систему рівнянь для визначення  $q_{1i}(x), i = \overline{1, m}$

$$S(x)q'_1(x) = T(x)q_1(x) + f(x), \quad (36)$$

де  $q_1(x) - m$  – вимірний вектор з компонентами  $q_{1i}(x)$ ,

$$\{f(x)\}_i = \text{tr}((B_1(x)W_1(x) + F_1(x) - W_1'(x))B^{i-1}(x)), i = \overline{1, m}.$$

Помноживши (36) зліва на матрицю  $D_1(x)$  маємо

$$xq_1'(x) = H(x)q_1(x) + \tilde{F}_1(x), \quad (37)$$

де  $\tilde{F}_1(x)$  згідно (24) при  $x \rightarrow 0$  має поведінку

$$\tilde{F}_1(x) = (I + O(x))K^{-1}D_1(x)f(x).$$

Система (37) в області (2) має голоморфний розв'язок  $q_1(x)$  такий, що  $q_{1i}(0) = 0, i = \overline{1, m}$ . Матриці  $V_{21}(x), U_{21}(x), C_1, D_1$  однозначно знаходяться з рівнянь (16), (17). Можна довести, що вказаним алгоритмом однозначно знаходяться довільні коефіцієнти розвинень (7), (8) і коефіцієнти розвинень є голоморфними функціями в області (2).

Матриця (7) при  $\varepsilon = 0$  має вигляд  $\Phi(x, 0) = \begin{pmatrix} U(x) & 0 \\ 0 & V(x) \end{pmatrix}$ , де  $U(x), V(x)$

визначаються за формулами (14). З умови (4) випливає, що  $\det U(x) \equiv 1$ . Згідно вибору розв'язку  $q_0(x)$  системи рівнянь (32) маємо  $V(0) = 1$ , а значить існує  $x_1 \leq x_0$  такий, що  $\det V(x) \neq 0$  для  $|x| \leq x_1$ . Отже  $\det \Phi(x, 0) \neq 0$  для  $|x| \leq x_1$ .

Можна довести, що за допомогою заміни  $u = V(\varepsilon)w$  система (5), (6) зводиться до вигляду

$$w_1' = c_1(\varepsilon)v_1, w_1' = 0, i = \overline{2, p}, \quad (38)$$

$$\varepsilon v' = B(x)v + \varepsilon D_1(\varepsilon)w, \quad (39)$$

де  $v = (v_1, \dots, v_m) - m$  – вимірний вектор;  $c_s = \{C(\varepsilon)\}_{s1}$ ,  $s = \overline{1, p}$ ;

$V(\varepsilon) - p \times p$  – матриця з діагональними елементами рівними одиниці, в якій

$\{V(\varepsilon)\}_{ii} = \frac{c_i(\varepsilon)}{c_1(\varepsilon)}, i = \overline{2, p}$ , при умові, що  $c_1(\varepsilon) \neq 0$ , а інші елементи рівні нулю;

$D_1(\varepsilon) = D(\varepsilon)V(\varepsilon) = \begin{pmatrix} 0 \\ d_1(\varepsilon) \end{pmatrix}$ . Таким чином доведена наступна теорема.

**Теорема.** Нехай матриці системи рівнянь (1) голоморфні в області (2). Тоді існують формальні ряди (7), (8), коефіцієнти яких голоморфні в області (2) такі, що  $\det \Phi(x,0) \neq 0$  при  $|x| \leq x_1 < x_0$  і формальне перетворення з матрицею заміни (7) приводить систему (1) до системи (38), (39).

### ПОСИЛАННЯ

- [1] Вазов В.(1968). *Асимптотические разложения решений обыкновенных дифференциальных уравнений*. -М.:Мир.
- [2] Wasow W. (1985). *Linear turning point theory*. - Springer – Verlag New York Ins..
- [3] Lee R.Y.(1969)/ On uniform simplification of linear differential equation in a full neighborhood of a turning point *J. Math. Anal. and Appl.* **27**, 501 – 510.
- [4] Hanson R.J.(1966)/ Reduction theorems for systems of ordinary differential equations with a turning point *J. Math. Anal. And Appl.* **16**, 280 – 301.
- [5] Sibuya Y. Uniform simplification in a full neighborhood of a transition point. (1974). *Memoirs of the Amer. Math. Soc.* **149**, 3 - 106.
- [6] Turrutin H.L. Stokes multipliers for asymptotic solutions of a central differential equation (1950). *Trans. Am: Math. Soc.* **68**, 304 - 329.
- [7] Самойленко А.М.(2002) Об асимптотическом интегрировании одной системы линейных дифференциальных уравнений с малым параметром при части производных. *Укр. мат. журн.* **54**, № 11, 1505- 1516.
- [8] Ключник І.Г. (2010). Лінійна система диференціальних рівнянь з точкою звороту. *Укр. мат. журн.* **62**, № 5, 625 – 642.